

CAPITOLUL 5

CAPACITATEA CANALELOR DE COMUNICAȚIE

În Capitolul 3, am văzut că putem utiliza codarea sursă pentru a reduce redundanța inerentă a unei surse de informație de entropie $H(S)$ și a îmbunătăți astfel eficiența. În Capitolul 4, luând în considerare cele mai simple tipuri de modulație digitală, am constatat că simbolurile transmise printr-un canal de comunicație sunt afectate de zgomot (și de alte perturbații), cu efectul că receptorul face din când în când erori. Dacă frecvența erorilor este prea ridicată, canalul este inutilizabil. Dar chiar și în cazul în care erorile produse în canal sunt rare, acest lucru nu ne satisface și dorim să reducem pe cât posibil frecvența lor de apariție la destinatarul informației transmise. Shannon a demonstrat că putem face probabilitatea de eroare arbitrar de mică utilizând redundanță controlată, ceea ce se numește *codare canal*.

Codarea canal este, într-un fel, operația duală codării sursă, cu deosebirea importantă că redundanța eliminată prin codarea sursă este naturală și nefolositoare, în vreme ce redundanța introdusă prin codarea canal este intenționată și foarte efectivă în îmbunătățirea fiabilității transmisiei.

În figura 5.1, se arată schema-bloc a unui sistem de transmisiune de date din care, pentru simplitate, am omis codarea sursă.

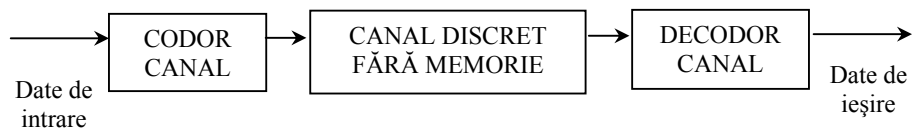


Fig. 5.1. Schema bloc a unui sistem de comunicație digital.

5.1. MODELE DE CANAL

În urma codării sursă, rezultă un șir de simboluri binare $\{x_i\}$, câte un bit la fiecare T_b secunde. În procesul de codare canal, împărțim acest șir de biți în blocuri de câte k biți, pe care le numim *mesaje*, adăugând fiecărui mesaj $n-k$ biți redundanți, astfel încât rezultă blocuri de câte n simboluri binare canal, blocuri pe care le numim *cuvinte de cod*. Există 2^k mesaje și tot atâtea cuvinte de cod, ceea ce înseamnă că $2^n - 2^k$ blocuri de câte n simboluri binare canal nu fac parte din codul canal; dacă unul din aceste blocuri ajunge la destinație din cauza zgomotului, receptorul va interpreta aceasta ca pe un simptom de eroare pe care o detectează. Prin proiectare, vrem să înzestrăm receptorul nu numai cu posibilitatea de a detecta o eroare, dar și cu aceea de a o corecta. Volumul de redundanță introdusă în acest mod prin codarea datelor se măsoară prin raportul n/k . Inversul acestui raport, k/n , se numește *rata codului*. Notăm un cod având lungimea mesajului de k biți și lungimea cuvântului de cod de n biți cu (n, k) .

Șirul binar de la ieșirea codorului canal se aplică la intrarea modulatorului, care servește drept interfață cu canalul de comunicație. Într-o modulație binară, modulatorul pune în corespondență fiecare bit cu una din două forme de undă posibile: 0 este transmis ca $x_0(t)$, iar 1, ca $x_1(t)$. Într-o modulație M -ară, care utilizează mai eficient lărgimea de bandă a canalului, se transmit nu biți, ci multibiți, multibitul fiind un bloc de m biți; fiecăruia din multibiți îi corespunde una din $M = 2^m$ forme de undă posibile.

La extremitatea de recepție a sistemului de comunicație digital, demodulatorul prelucrează forma de undă coruptă de canal și reduce fiecare formă de undă la un scalar sau la un vector ce reprezintă o estimăție a simbolului de date emis (fie el binar sau M -ar). Detectorul, care urmează după demodulator, poate decide dacă bitul transmis este un 0 sau un 1. Spunem că detectorul a luat o *decizie fermă* (în engleză: **hard decision**). Dacă se consideră procesul de decizie la nivelul detectorului drept o formă de cuantizare, observăm că decizia fermă corespunde cunatizării binare a semnalului de la ieșirea demodulatorului. Mai general, putem considera un detector care cuantizează pe $Q > 2$ nivele. Dacă se utilizează M semnale, avem în acest caz $Q \geq M$. Dacă $Q > M$, spunem că detectorul a luat o *decizie suplă* (în engleză: **soft decision**). Ieșirea cuantizată de la detector se aplică apoi la intrarea decodurului canal, care exploatează redundanța disponibilă pentru a corecta perturbațiile produse în canal.

În continuare, descriem câteva modele de canal care se vor dovedi utile la proiectarea codurilor.

Canale pentru forme de undă

Dacă nu considerăm decât canalul fizic, excluzând modulatorul și demodulatorul, avem un model de canal în care atât intrările cât și ieșirile sunt forme de undă. Presupunem că un astfel de canal are lărgimea de bandă B cu răspunsul în frecvență ideal $C(f) = 1$ în interiorul benzii B și că semnalul de la ieșirea sa este perturbat de zgomot aditiv alb Gaussian. Semnalul de intrare $x(t)$ este de bandă limitată, adică, $X(f)$, transformata Fourier a lui $x(t)$, este diferită de zero numai în interiorul unei benzi limitate de frecvențe. Semnalul corespunzător de ieșire este $y(t)$, iar cu $n(t)$ notăm funcția eșantion a unui proces de zgomot aditiv. Atunci,

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (5.1)$$

Un canal la care atât intrarea cât și ieșirea sunt forme de undă se numește *canal pentru forme de undă*. Cel mai simplu model matematic pentru un canal de comunicație este canalul pentru forme de undă afectat de zgomot aditiv, ilustrat în figura 5.2.

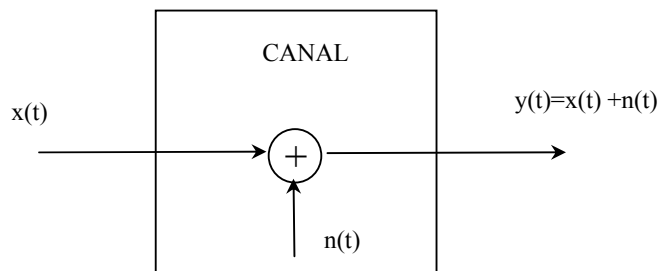


Fig. 5.2. Canalul afectat de zgomot aditiv.

În acest model, semnalul de emisie $x(t)$ este corupt de un proces de zgomot aditiv $n(t)$. Putem incorpora în model atenuarea pe care o suferă semnalul, notată cu α , astfel încât semnalul recepționat să se poată exprima astfel:

$$y(t) = \alpha x(t) + n(t) \quad (5.2)$$

Canal binar simetric

Să considerăm modulatorul și demodulatorul drept componente ale canalului. Dacă modulatorul generează forme de undă binare iar detectorul produce decizii ferme (hard), canalul compus, arătat în figura 5.3, are drept intrare și drept ieșire două șiruri binare în timp discret. Un astfel de canal compus este caracterizat de mulțimea $X = \{0, 1\}$ a intrărilor posibile, de mulțimea $Y = \{0, 1\}$ a ieșirilor posibile și de o mulțime de probabilități condiționate care leagă între ele ieșirile posibile de intrările posibile. Dacă zgomotul din canal și celelalte perturbații cauzează în șirul binar transmis erori independente statistic cu probabilitate medie p , atunci

$$\begin{aligned} P(Y = 0 | X = 1) &= P(Y = 1 | X = 0) = p \\ P(Y = 1 | X = 1) &= P(Y = 0 | X = 0) = 1 - p \end{aligned} \tag{5.3}$$

Am redus astfel cascada constituită din modulatorul binar, canalul pentru forme de undă, demodulatorul binar și detector într-un canal echivalent în timp discret reprezentat în figura 5.3 și denumit *canal binar simetric* (CBS).

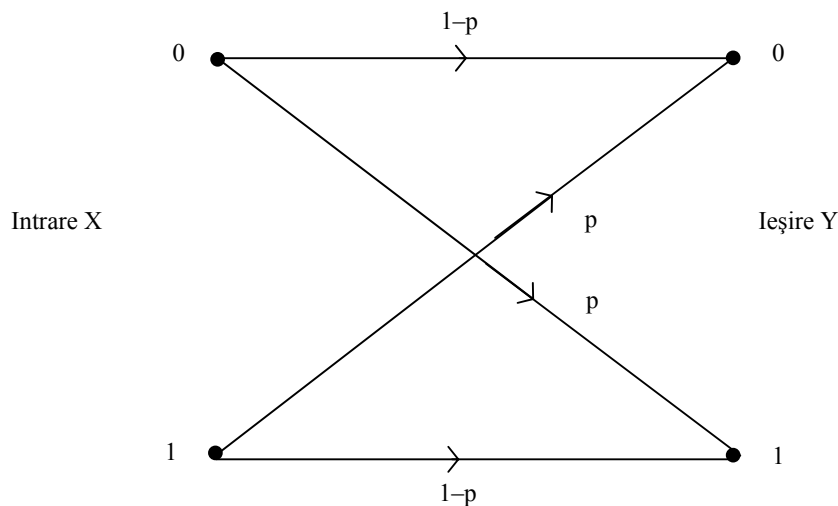


Fig. 5.3. Canal binar simetric.

Întrucât fiecare bit de ieșire din canalul CBS nu depinde decât de bitul de intrare corespunzător, spunem că acest canal este *fără memorie*. Transmiterea unui bit pe acest canal se spune că este o *utilizare* a canalului.

Canale discrete fără memorie

CBS este un caz particular al unui canal mai general având intrări și ieșiri discrete. Să presupunem că simbolurile aplicate la intrarea codorului canal sunt M -are, unde $M = 2^m$, adică, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\}$, iar ieșirea detectorului constă din simboluri Q -are, $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{Q-1}\}$, unde $Q \geq M$. Dacă atât canalul cât și modulația sunt fără memorie, caracteristica intrare-ieșire a canalului compus, arătat în figura 5.4, este descrisă de un sistem de MQ probabilități condiționate

$$P(Y = y_i | X = x_j) \equiv P(y_i | x_j) \quad (5.4)$$

unde $i = 0, 1, \dots, Q-1$ și $j = 0, 1, \dots, M-1$. Un astfel de canal se numește *canal discret fără memorie* (CDFM) și este reprezentat grafic în figura 5.4.

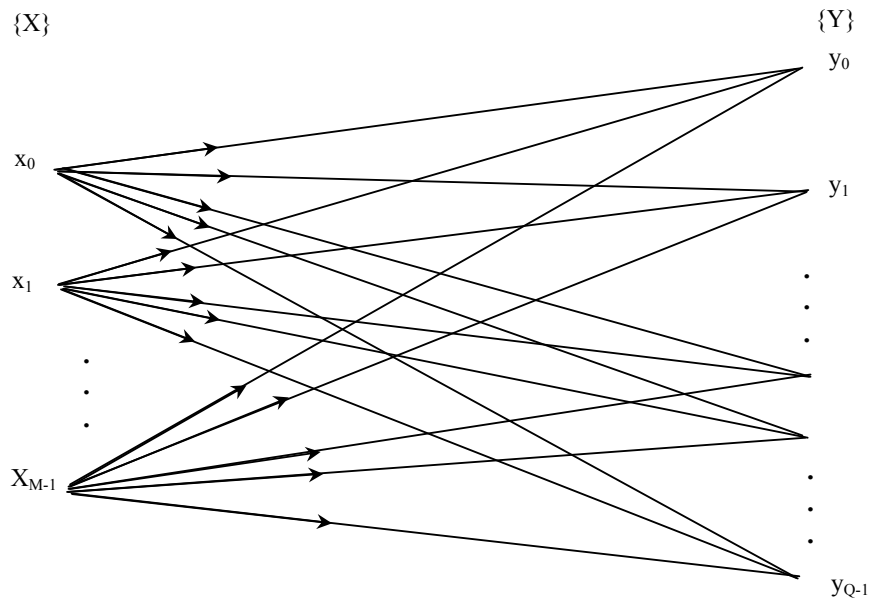


Fig. 5.4. Canal discret cu M intrări și Q ieșiri.

Dacă intrarea într-un CDFM este un șir de n simboluri u_1, u_2, \dots, u_n selectate din alfabetul X , iar ieșirea corespunzătoare este șirul v_1, v_2, \dots, v_n de simboluri din alfabetul Y , probabilitatea condiționată este

$$\begin{aligned} P(Y_1 = v_1, Y_2 = v_2, \dots, Y_n = v_n | X_1 = u_1, X_2 = u_2, \dots, X_n = u_n) \\ = \prod_{l=1}^n P(Y = v_l | X = u_l) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Probabilitățile condiționate $\{P(y_i | x_j)\}$ ce caracterizează un CDFM pot fi aranjate într-o matrice $\mathbf{P} = \{p_{ji}\}$ unde, prin definiție, $p_{ji} \equiv P(y_j | x_i)$. \mathbf{P} se numește *matricea probabilităților de tranziție* pentru canal.

Canal cu intrări discrete și ieșiri continue

Să presupunem că la intrarea modulatorului se aplică simboluri selectate dintr-un alfabet de intrare discret și finit $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\}$, iar ieșirea detectorului este necuantizată ($Q = \infty$). Așadar, intrarea în decodorul canal poate lua orice valoare de pe axa numerelor reale: $Y = \{-\infty, \infty\}$. Definim un canal fără memorie caracterizat prin intrarea discretă X , ieșirea continuă Y și mulțimea funcțiilor densitate de probabilitate condiționată $p(y | X = x_i)$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$.

Cel mai important canal de acest tip este canalul caracterizat prin zgomot aditiv alb Gaussian, pentru care

$$Y = X + G \quad (5.6)$$

unde G este o variabilă aleatoare Gaussiană de medie zero cu varianță σ^2 iar $X = x_i$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$. Pentru o variabilă aleatoare X dată, urmează că Y este o variabilă aleatoare Gaussiană cu medie x_i și varianță σ^2 . Adică,

$$p(y | X = x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(y-x_i)^2/2\sigma^2} \quad (5.7)$$

Pentru orice șir de intrare dat, $X_l, l = 1, 2, \dots, n$, există un șir de ieșire corespunzător

$$Y_l = X_l + G_l, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (5.8)$$

Condiția ca acest canal să fie fără memorie se poate exprima astfel:

$$\begin{aligned} p(y_1, y_2, \dots, y_n | X_1 = u_1, X_2 = u_2, \dots, X_n = u_n) = \\ = \prod_{l=1}^n p(y_l | X_l = u_l) \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2. CAPACITATEA CANALULUI

Să considerăm un CDFM având un alfabet de intrare $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\}$, un alfabet de ieșire $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{Q-1}\}$ și mulțimea probabilităților de tranziție $P(y_i | x_j)$ definite în (5.3). Presupunem că s-a emis simbolul x_j și că se recepționează simbolul y_i . Informația mutuală furnizată cu privire la evenimentul $X = x_j$ de apariția evenimentului $Y = y_i$ este $\log_2[P(y_i | x_j) / P(y_i)]$, unde

$$P(y_i) \equiv P(Y = y_i) = \sum_{l=0}^{M-1} P(x_l)P(y_i | x_l) \quad (5.10)$$

De aceea, informația mutuală medie furnizată de ieșirea Y cu privire la intrarea X este

$$I(X; Y) = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{Q-1} P(x_j)P(y_i | x_j) \log_2 \frac{P(y_i | x_j)}{P(y_i)} \quad (5.11)$$

Caracteristicile canalului determină probabilitățile de tranziție $P(y_i | x_j)$, dar probabilitățile simbolurilor de intrare sunt sub controlul codorului. Valoarea lui $I(X; Y)$ maximizată pe mulțimea tuturor distribuțiilor de probabilitate ale variabilei aleatoare X este o mărime ce nu depinde decât de caracteristicile CDFM prin probabilitățile condiționate $P(y_i | x_j)$. Această mărime se numește *capacitatea canalului* și se notează cu C :

$$\begin{aligned} C &= \max_{P(x_j)} I(X; Y) \\ &= \max_{P(x_j)} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{Q-1} P(x_j)P(y_i | x_j) \log_2 \frac{P(y_i | x_j)}{P(y_i)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Maximizarea lui $I(X; Y)$ se efectuează supunând-o constrângerilor ca

$$P(x_j) \geq 0$$

și

$$\sum_{j=0}^{M-1} P(x_j) = 1.$$

Capacitatea canalului se măsoară în biți pe simbol de intrare în canal (biți pe o utilizare a canalului). Dacă în fiecare T_s secunde în canal intră un simbol, capacitatea canalului în biți/s este C / T_s .

EXEMPLUL 5.1: Pentru un CBS cu probabilități de tranziție $P(0|1) = P(1|0) = p$, informația mutuală este maximizată dacă probabilitățile de intrare $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$. Deci, capacitatea unui CBS este

$$C = p \log_2 2p + (1-p) \log_2 2(1-p) = 1 - H(p) \quad (5.13)$$

unde $H(p)$ este funcția entropie binară [vezi (2.6) și figura 2.1]. Se observă că, dacă probabilitatea de eroare $p = 0$, capacitatea CBS este de 1 bit pe o utilizare a canalului. Pentru $p = \frac{1}{2}$, capacitatea canalului este zero. Dacă $\frac{1}{2} < p \leq 1$, putem inversa 0 cu 1 la ieșirea canalului, ceea ce face că C este simetrică în raport cu punctul $p = \frac{1}{2}$.

Să considerăm acum canalul fără memorie în timp discret afectat de zgomot aditiv alb Gaussian, descris de funcțiile densitate de probabilitate de tranziție definite de (5.6). Capacitatea acestui canal în biți pe utilizare a canalului este informația mutuală medie maximă dintre intrarea discretă $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\}$ și ieșirea $Y = \{-\infty, \infty\}$:

$$C = \max_{P(x_i)} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|x_i) P(x_i) \log_2 \frac{p(y|x_i)}{p(y)} dy \quad (5.14)$$

unde

$$p(y) = \sum_{l=0}^{M-1} p(y|x_l) P(x_l) \quad (5.15)$$

EXEMPLUL 5.2: Să considerăm un canal fără memorie afectat de zgomot aditiv alb Gaussian, cu intrări binare $X = A$ și $X = -A$. Informația mutuală medie $I(X; Y)$ este maximizată dacă probabilitățile de intrare sunt $P(X = A) = P(X = -A) = \frac{1}{2}$. De aceea, capacitatea acestui canal în biți pe o utilizare a canalului este

$$C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|A) \log_2 \frac{p(y|A)}{p(y)} dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|-A) \log_2 \frac{p(y|-A)}{p(y)} dy \quad (5.16)$$

Capacitatea canalelor Gaussiene de bandă limitată și de putere limitată

Să considerăm un proces staționar de medie zero $X(t)$ a cărui bandă de frecvențe este limitată la B [Hz]. Eșantionăm uniform acest proces cu frecvența Nyquist de $2B$ eșantioane pe secundă. Rezultă variabilele aleatoare de tip continuu $X_k, k = 1, 2, \dots, K$. Aceste K eșantioane se transmit în T secunde pe un canal zgomotos, limitat și el la B [Hz]. Prin urmare, numărul eșantioanelor, K , este dat de

$$K = 2BT \quad (5.17)$$

Numim X_k un eșantion al *semnalului de emisie*. Ieșirea canalului este perturbată de zgomot aditiv alb Gaussian de medie zero și densitate spectrală de putere $N_0/2$. Zgomotul este limitat în bandă la B [Hz]. Considerăm eșantioanele semnalului recepționat ca fiind variabile aleatoare de tip continuu $Y_k, k = 1, 2, \dots, K$:

$$Y_k = X_k + Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.18)$$

Eșantionul zgomotului Z_k este Gaussian cu medie zero și varianță dată de

$$\sigma^2 = N_0 B \quad (5.19)$$

Presupunem că eșantioanele $Y_k, k = 1, 2, \dots, K$ sunt independente statistic. Utilizăm modelul de canal din figura 5.2, cu notațiile modificate corespunzător. Deoarece emițătorul are o putere limitată, să notăm cu P puterea medie transmisă:

$$E[X_k^2] = P, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.20)$$

Capacitatea canalului este prin definiție maximul informației mutuale dintre intrarea X_k și ieșirea canalului Y_k , maximul fiind considerat peste toate distribuțiile de probabilitate ale intrării X_k ce satisfac constrângerea (5.20):

$$C = \max_{p_{X_k}(x)} [I(X_k; Y_k) : E[X_k^2] = P] \quad (5.21)$$

Maximizarea se efectuează cu privire la $p_{X_k}(x)$, funcția densitate de probabilitate a lui X_k .

În Capitolul 2, am văzut că putem exprima informația mutuală astfel (vezi (2.59)):

$$I(X_k; Y_k) = h(Y_k) - h(Y_k | X_k) \quad (5.22)$$

Întrucât X_k și Z_k sunt variabile aleatoare independente, iar suma lor este egală cu Y_k , entropia diferențială a lui Y_k condiționată de X_k este egală cu entropia diferențială a lui Z_k :

$$h(Y_k | X_k) = h(Z_k) \quad (5.23)$$

De aceea, putem rescrie (5.22) astfel:

$$I(X_k; Y_k) = h(Y_k) - h(Z_k) \quad (5.24)$$

Având în vedere că $h(Z_k)$ este independentă de distribuția lui X_k , maximizarea lui $I(X_k; Y_k)$ conform cu (5.21) pretinde maximizarea lui $h(Y_k)$, entropia diferențială a eșantionului Y_k al semnalului recepționat. Dar, pentru ca $h(Y_k)$ să fie maximă, Y_k trebuie să fie o variabilă aleatoare Gaussiană. Aceasta înseamnă că eșantioanele semnalului recepționat reprezintă un proces de același gen cu zgomotul. Cum însă Z_k este o variabilă aleatoare Gaussiană prin ipoteză, eșantionul X_k al semnalului de emisie trebuie să fie și el Gaussian. Putem deci spune că maximizarea din (5.21) are loc alegând eșantioanele semnalului de emisie dintr-un proces de genul zgomotului și de putere medie P . În mod corespunzător, putem reformula (5.21) astfel:

$$C = I(X_k; Y_k) : X_k \text{ Gaussiană, } E[X_k^2] = P \quad (5.25)$$

Pentru evaluarea capacității informaționale C , procedăm în trei etape:

1. Variația eșantionului Y_k al semnalului recepționat este egală cu

$P + \sigma^2$. În Capitolul 2, am calculat entropia diferențială a unei variabile aleatoare distribuite Gaussian (vezi (2.44)). Putem deci scrie

$$h(Y_k) = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi e(P + \sigma^2)] \quad (5.26)$$

2. Variația eșantionului de zgomot Z_k este egală cu σ^2 . Avem deci

$$h(Z_k) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma^2) \quad (5.27)$$

3. Substituind (5.26) și (5.27) în (5.24), obținem în definitiv:

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \text{ biți pe o utilizare a canalului} \quad (5.28)$$

Pentru a transmite K eșantioane ale procesului $X(t)$ în T secunde, trebuie să utilizăm canalul de K ori. De aceea, capacitatea informațională în unitatea de timp (utilizând, cu un mic abuz de notație, aceeași literă C) este:

$$C = \frac{K}{2T} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 B} \right) \text{ biți pe secundă} \quad (5.29)$$

Dar numărul K este egal cu $2BT$, astfel încât (5.29) se poate scrie:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 B} \right) \text{ biți pe secundă} \quad (5.30)$$

Funcția (5.30) exprimă sintetic cea de a treia teoremă a lui Shannon, *teorema capacității informaționale*, care se enunță astfel: Capacitatea informațională a unui canal de tip continuu cu lărgime de bandă B [Hz], perturbat de zgomot aditiv alb Gaussian de densitate spectrală de putere $N_0/2$ și limitat în bandă la B este dată de formula (5.30), unde P este puterea medie transmisă.

Nu este posibil să transmitem la o viteză mai mare de C biți pe secundă prin nici un sistem de codare. Teorema capacității informaționale definește deci o *limită fundamentală* a vitezei de transmisiune fără erori pentru un canal Gaussian de putere limitată și de bandă limitată.

5.3. SISTEM DE TRANSMISIUNE IDEAL

Pentru a putea evalua performanța unui sistem de comunicație practic, avem nevoie de un termen de referință ideal cu care să facem comparație. În acest scop, introducem noțiunea de *sistem ideal* definit drept sistem care transmite date cu o viteză de bit R_b egală cu capacitatea informațională C . Dacă E_b este energia transmisă pe bit, putem exprima puterea medie transmisă astfel:

$$P = E_b C \quad (5.31)$$

În mod corespunzător, sistemul ideal se definește prin ecuația

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b C}{N_0 B} \right) \quad (5.32)$$

În mod echivalent, pentru sistemul ideal putem defini *raportul dintre energia semnalului pe bit și densitatea spectrală de putere a zgomotului* E_b / N_0 în funcție de raportul C / B astfel:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B} \quad (5.33)$$

Un grafic reprezentând eficiența lărgimii de bandă R_b / B în funcție de E_b / N_0 se numește *diagrama de eficiență a lărgimii de bandă*. În figura 5.5 se arată o formă generală a acestei diagrame, în care curba etichetată „limita de capacitate” corespunde sistemului ideal pentru care $R_b = C$.

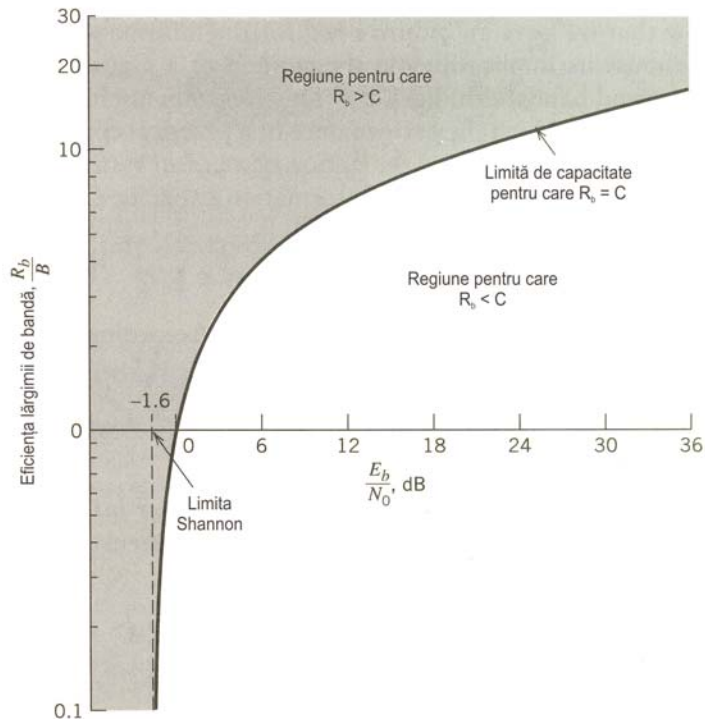


Fig. 5.5. Diagrama de eficiență a lărgimii de bandă.

Pe baza figurii 5.5, putem face următoarele observații:

1. Pentru *lățime de bandă infinită*, raportul E_b / N_0 tinde spre limita

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_\infty = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \ln 2 = 0,693 \quad (5.34)$$

Această valoare se numește *limita Shannon* pentru un canal afectat de zgomot aditiv alb Gaussian, presupunând un cod de rată zero. Exprimată în decibeli, ea este egală cu $-1,6$ dB. Valoarea limită corespunzătoare a capacității canalului se obține făcând ca lățimea de bandă B să tindă la infinit în (5.29):

$$C_\infty = \lim_{B \rightarrow \infty} C = \frac{P}{N_0} \log_2 e \quad (5.35)$$

unde e este baza logaritmilor naturali.

2. *Limita de capacitate*, definită de curbă pentru viteza de bit critică $R_b = C$, separă combinații ale parametrilor de sistem ce permit în principiu o transmisiune fără erori ($R_b < C$) de acelea pentru care o transmisiune fără erori nu este posibilă ($R_b > C$).

3. Diagrama pune în lumină *compromisurile* potențiale între E_b / N_0 , R_b / B și probabilitatea erorilor de simbol P_e . Astfel, putem concepe deplasarea punctului de operare de-a lungul unei drepte orizontale ca pe un compromis între P_e și E_b / N_0 pentru R_b / B fixat, iar deplasarea punctului de operare de-a lungul unei drepte verticale ca pe un compromis între P_e și R_b / B pentru E_b / N_0 fixat.

În capitolul următor, începem studiul codurilor detectoare și corectoare de erori.